ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΕ ΔΙΣΚΟ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ CAUCHY

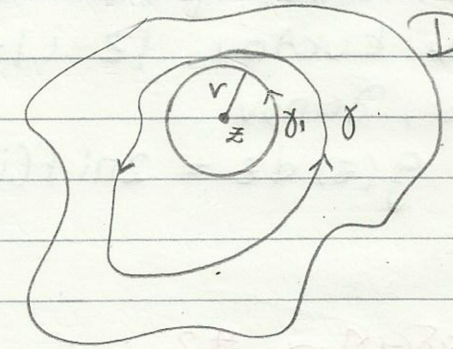
ΘΕΩΡΗΜΑ (1ο ΘΕΩΡΗΜΑ CAUCHY)

Έστω $f(z)$ συνάρτηση ολόμορφη στον τόπο D (όπου D απλά συνεκτικός) και γ απλή, κλειστή, θετικά προσανατολισμένη και κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη του D. Τότε ισχύει:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z_0)}{z_0-z}\,dz_0 \Leftrightarrow \oint_\gamma \frac{f(z_0)}{z_0-z}\,dz_0 = 2\pi i f(z)$$

Απόδειξη:

Έστω z στο εσωτερικό της καμπύλης γ. Θεωρούμε μια σφαιρική περιοχή $B(z,r)$ με $r>0$ και τέτοιο ώστε ολόκληρος ο δίσκος $B(z,r)$ να βρίσκεται στο εσωτερικό της γ. Να πούμε ότι $\partial B(z,r)=\gamma_1$. Έτσι, λοιπόν για τις γ και γ_1 και τη συνάρτηση $\frac{f(z_0)}{z_0-z}$ προκύπτει από τα πορίσματα του Θεωρήματος του Cauchy ότι:



$$\oint_\gamma \frac{f(z_0)}{z_0-z}\,dz_0 = \oint_{\gamma_1} \frac{f(z_0)}{z_0-z}\,dz_0 . \quad (1)$$

Η παραμέτρηση της γ_1 είναι:

$$z(t)=z+r(\cos t+i\sin t)=z+re^{it},\ t\in[0,2\pi]$$

Άρα, από ορισμό του επικαμπυλίου:

$$\oint_{\gamma_1}\frac{1}{z_0-z}\,dz_0=\int_0^{2\pi}\frac{rie^{it}}{\cancel{z}+re^{it}-\cancel{z}}\,dt=2\pi i \Rightarrow 2\pi i f(z)=\oint_{\gamma_1}\frac{f(z)}{z_0-z}\,dz_0$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma_1}\frac{f(z)}{z_0-z}\,dz_0-2\pi i f(z)=\oint_{\gamma_1}\frac{f(z_0)-f(z)}{z_0-z}\,dz_0 \quad (2)$$

f συνεχής στο $z \Rightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\ |z_0-z|<\delta \Rightarrow |f(z_0)-f(z)|<\varepsilon$

Ας είναι $r<\delta$ τότε

$$\left|\oint_{\gamma_1}\frac{f(z_0)-f(z)}{z_0-z}\,dz\right| \le \varepsilon\oint_{\gamma_1}\frac{1}{r}|dz_0| = \varepsilon\cdot 2\pi \quad (3)$$

Από (1), (2) και (3) $\Rightarrow \left|\oint_\gamma \frac{f(z_0)}{z_0-z}\,dz_0-2\pi i f(z)\right|<\varepsilon 2\pi$

Παράδειγμα #1:

Να υπολογιστεί το $I=\oint_\gamma \frac{z}{z^2+1}\,dz$ όπου γ κύκλος με εξίσωση $|z-i|=1$

ΛΥΣΗ

Έστω $g(z)=\frac{z}{z^2+1}$ ολόμορφη στον τόπο $D=\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$

$$g(z)=\frac{z}{z^2+1}=\frac{z}{(z-i)(z+i)}=\frac{f(z)}{z-i} \quad \text{με } f(z)=\frac{z}{z+i} \text{ όπου}$$

είναι ολόμορφη στο σύνορο και στο εσωτερικό του κύκλου $|z-i|=1$ με $i\in$ στον δίσκο

Έτσι, λοιπόν

$$\oint_\gamma g(z)\,dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{1}{i+i} = \pi i$$

Παράδειγμα #2:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$I=\oint_\gamma \frac{iz+z^3}{z^3-1}\,dz$ όπου γ κύκλος με εξίσωση

$|z-1|=1$

ΛΥΣΗ

Έστω $g(z)=\frac{iz+z^3}{z^3-1}$, $\forall z\in D=\mathbb{C}\setminus\{z_0,z_1,z_2\}$

όπου

$z^3-1=0 \Rightarrow z^3=1=\cos 0+i\sin 0$.

Άρα,

$$z_k=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{2k\pi+0}{3}+i\sin\frac{2k\pi+0}{3}\right),\ k=0,1,2$$

Έπεται ότι,

$z_0=\cos 0+i\sin 0=1$

$z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Όμοια με πριν τώρα έχουμε:

$$g(z)=\frac{iz+z^3}{(z-1)(z^2+z+1)}=\frac{f(z)}{z-1},\ \text{με } f(z)=\frac{iz+z^3}{z^2+z+1}$$

Έτσι, λοιπόν:

$$\oint_\gamma g(z)\,dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i\left(\frac{i+1}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}(-1+i)$$